Διάλεξη 20η ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

20/12/2018

(θεώρημα)

Έστω $a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$, $x_0 \in I$ || $a_2(x_0) \neq 0$, $\frac{a_1}{a_2}, \frac{a_0}{a_2}$ αναλυτικές στο x_0 (R_1, R_2) || c_0, c_1: δεδομένα

ολόκλ.

$$\exists c_n: \; y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

Παράδ. 4:

δουλεύω με αυτά τα x μόνο.

-1 1

$(1-x^2)y'' - xy' + y = 0$, $x_0 = 0$, $|x| < 1$, $R = 1$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \;\Big\|\; (1-x^2)\left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n n(n-1) x^{n-2}\right] - x \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0. \Rightarrow$$

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n n(n-1) x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot n(n-1) x^n - \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \Rightarrow$$

$$\sum_{n=-2}^{\infty} c_{n+2} (n+2)(n+1) x^n$$

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+1) c_{n+2} - n(n-1) c_n - n c_n + n c_n \right] x^n$$

(πράξεις) . . . .

Μετά από πράξεις προκύπτει ότι:

$y_1(x) = x$

$$y_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2} - \sum_{n=2}^{\infty} (\ldots\ldots) x^{2n}, \quad |x| < 1$$

Παραδ. 5:

$$x^2(x^2-1)y'' + x(2x^2-1)y' + y = 0$$, για $0<x$ ή $x\in(a,+\infty)$ όπου a: πολύ μεγάλο.

$w=\frac{1}{x}$ (αλλαγή μεταβλητής)

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dw}\frac{dw}{dx} = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dw} \Rightarrow \boxed{-w^2\frac{dy}{dw} = y'}$$

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dw}\left(-w^2\frac{dx}{dw}\right)\frac{dw}{dx}$$

$$= \left[-2w\frac{dy}{dw} - w^2\frac{d}{dw}\left(\frac{dy}{dw}\right)\right]\underbrace{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}_{-w^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{y'' = 2w^3\frac{dy}{dw} + w^4\frac{d^2y}{dw^2}}$$

Η εξίσωση γράφεται ως:

$$\frac{1}{w^2}\left(\frac{1}{w^2}-1\right)\left[2w^3\frac{dy}{dw} + w^4\frac{d^2y}{dw^2}\right] + \frac{1}{w^2}\left(\frac{2}{w^2}-1\right)\left(-w^2\frac{dy}{dw}\right) + y = 0.$$

Μετά από πράξεις προκύπτει ότι

$y_1(w) = w$

$y_2(w) = 1 - \frac{w^2}{2} + \sum_{n=2}^{\infty}(\ldots)w^{2n}$, $|w|<1$, $\left|\frac{1}{x}\right|<1 \Rightarrow 1<|x|$.

Έτσι έχω ότι: $y_1(x) = \frac{1}{x}$, $1<x$ ή $x<-1$

$y_2(x) = 1 - \frac{1}{2x^2} + \sum(\ldots)\frac{1}{x^{2n}}$, $|x|>1$.

(-5 (λυμένες)
Άσκηση: Έστω $y'' - \cos x \, y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.
Να βρεθούν οι 6 πρώτοι όροι της δυναμοσειράς.

Λύση

Θα χρησιμοποιήσω το προηγούμενο θεώρημα.

Αρχικά έχω: $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$.

και

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} - \underbrace{\cos x}_{} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

Το $\cos x$ είναι μια αναλυτική συνάρτηση οπότε μπορώ να την γράψω με την μορφή δυναμοσειράς ⊛

⊛ $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$, $x \in \mathbb{R}$

Θα το χρησιμοποιήσω στην άσκηση:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) =$$

$$= (a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0)(b_\lambda x^\lambda + b_{\lambda-1} x^{\lambda-1} + \dots + b_1 x + b_0)$$

$$= a_k b_\lambda x^{k+\lambda} + (a_{k-1} + b_{\lambda-1}) x^{k-\lambda 1} + (a_k b_{\lambda-2} + a_{k-1} b_{\lambda-1} + a_{k-2} b_\lambda) x^{k+\lambda-2} + \dots + a_0 b_0$$

π.χ.

$$(a_{100} x^{100} + \dots + a_1 x + a_0)(b_{500} x^{500} + \dots + b_1 x + b_0)$$

Ο συντελεστής είναι:

$$\frac{x^{101}}{x^3} \underbrace{(a_0 b^{101} + a_1 b_{100} + a_2 b_{99} + \dots + a_{100} b_1)}_{} =$$

$$\sum_{\substack{i+j=101 \\ 0 \le i \le 100 \\ 0 \le j \le 500}} a_i b_j$$

(συνέχεια άσκησης)

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n. \text{ όπου}$$

$$d_n = \sum_{i=0}^{\infty} a_i b_{n-i}$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση έχω ότι:

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} - \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right)$$

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n \Rightarrow$$

$$0 = \sum_{n=-2}^{\infty} (n+2)(n+1) c_{n+2} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n = \sum_{0}^{\infty} \left((n+1)(n+2) c_{n+2} - d_n\right) x^n$$

για $d_n = \sum_{i=0}^{n} b_i c_{n-i}$,

$$b_i = \begin{cases} \frac{(-1)^k}{k!} & , i = 2k \\ 0 & , i = 2k+1 \end{cases} \Rightarrow \quad c_{n+2} = \frac{d_n}{(n+1)(n+2)}, \quad n \geq 0$$

$c_0 = 1, \quad c_1 = 2$

Οι 2 πρώτοι όροι $c_0 = 1$, $c_1 = 2$ είναι δεδομένοι άρα πρέπει να βρω τους υπόλοιπους 4 όρους (από τους ζητούμενους).
Άρα πάω κάνω αντικαταστάσεις:

για $n = 0$: $c_2 = \frac{d_0}{1 \cdot 2} = \frac{b_0 c_0}{1 \cdot 2} = \ldots$

κ.ο.κ.

Άσκηση Σ1: (Λύσεις)

$\underbrace{(x^2-2x)}_{a_2(x)}y'' + \underbrace{5(x-1)}_{a_1(x)}y' + 3y = 0 \quad \| \quad y(1)=2,\ y'(1)=1,\ x_0=1.$ $\quad a_0(x)=3$

$\hookrightarrow a_2(1) = -1 \neq 0$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{5(x-1)}{x^2-2x} = \frac{5(x-1)}{(x-1)^2-1} = -\frac{5(x-1)}{1-(x-1)^2} = -5(x-1)\frac{1}{1-(x-1)^2}$$

$$= -5(x-1)\sum_{n=0}^{\infty}\left[(x-1)^2\right]^n$$

$$|(x-1)^2| < 1 \Rightarrow |x-1| < 1 \Rightarrow \underline{0 < x < 2}$$

~o~o~o~o~o~o~o~o~o

Θέματα Διαγωνίσματος:

① (i) $y' = \underbrace{x^3y + 4x^2y^5}_{f(x,y)}$, $y(0)=0$

(2,5 μονάδες)

(ii) a) $y' = (xy)^{2/3}$, $y(1) = c \begin{cases} c=0 & \text{τουλ. 2 λύσεις.} \\ c=1 & \end{cases}$

β) $y' = y\,\mathrm{Arctg}x = 4x^2\dfrac{y}{x^2+1}$, $y(1)=1$, $[1,+\infty)$

λύσεις: ακριβώς μία.

② $y''' + a_2y'' + a_1y' + a_0y = b$ | $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $b \in C([a,+\infty)$

y_0: λύση, (E_0): $y_0(0) = 0 = y_0'(0)$, $y_0''(0) = 1$.

(i) $y_m(x) = \int_0^x y_0(x-s)b(s)\,ds$, $x \geq 0$

λύση της (E): $y_m(0) = y_m'(0) = y_m''(0) = 0$

(ii) a) $y''' + 6y'' + 11y' + 6y = b$, $x \geq 0$

b: συνεχής και φραγμένη στο $[0, +\infty)$, ∃ μια φραγμ. λύση.

↳ Το χαρ/κό πολ/μο : $P(\lambda) = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6$

⇝ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 < 0$

λύσεις : $e^{\lambda_1 x}$, $e^{\lambda_2 x}$, $e^{\lambda_3 x}$

(3) $x\,dy = [1 + \log \frac{y}{x}]\, y\, dx$, $x \geq 1$

$y(e) = 1$

$y' = [1 + \log(\frac{y}{x})] \frac{y}{x}$

(ii) $xy'' + x(y')^2 - y = 0$

↳ $y' = z$: $xz' + xz^2 + z = 0$

(iii) $z = \log y$ ⇝ $xy' - y\log y = x^2 y$

$z' = \frac{y'}{y}$

... $xz' - z = x^2$

(4) (i) Θεώρημα υποβιβασμού τάξης (απόδ)

(ii) B) Για την εξίσωση $y'' + a(t)y(t) = 0$ ← νδο

α) Να εξετασθεί η αλήθεια της πρότασης:

Αν y_1, y_2 ανεξ. γραμ. λύση της δ.ε. έτσι ώστε $y_1(x) \neq 0$, $x \in I$

τότε $u(x) = \frac{y_2(x)}{y_1(x)}$, $x \in I$ λύση.